Sección 5.3 5,6,8

Imagen que contiene Diagrama

Descripción generada automáticamente

a)

ɸ

→ Teorema 4.35.1, ψ por ¬ψ

ɸ ∨ (¬ψ)

≡ Axioma 5

(¬ψ) ∨ ɸ

≡ Teorema 4.28.1

(ψ → ɸ)

b)

(ϕ → ψ) → ϕ

≡ Lema: Axioma 12, Leibniz ψ por (ϕ → ψ), 𝜏 por ((ϕ ∨ ψ) ≡ ψ), ϕ por [p → ϕ]

((ϕ ∨ ψ) ≡ ψ) → ϕ

≡ Axioma 12, ϕ por ((ϕ ∨ ψ) ≡ ψ)

(((ϕ ∨ ψ) ≡ ψ) ∨ ϕ) ≡ ϕ

≡ Lema: Axioma 8, Leibniz ψ por (((ϕ ∨ ψ) ≡ ψ) ∨ ϕ), 𝜏 por (((ϕ ∨ ψ) ∨ ϕ) ≡ (ψ ∨ ϕ)), ϕ por [p ≡ ϕ]

(((ϕ ∨ ψ) ∨ ϕ) ≡ (ψ ∨ ϕ)) ≡ ϕ

≡ Lema: Axioma 5 y Axioma 8, Leibniz ψ por (ϕ ∨ ψ) ∨ ϕ 𝜏 por (ϕ ∨ ψ), ϕ por [p ≡ (ψ ∨ ϕ)) ≡ ϕ]

((ϕ ∨ ψ) ≡ (ψ ∨ ϕ)) ≡ ϕ

≡ Lema: Meta teorema de coherencia, Leibniz ψ por (ϕ ∨ ψ) ≡ (ψ ∨ ϕ)),𝜏 por true. Φ por [p ≡ ϕ]

true ≡ ϕ

→ Teorema 4.31.4

true → ϕ

≡ Teorema 4.29.3

ϕ

c)

(ψ → τ) → (ϕ → τ)

≡ Teorema 4.28.2

(ψ → τ) ∧ (ϕ → τ) ≡ (ψ → τ)

≡ Lema: Teorema 4.35.5, Leibniz ψ por (ψ → τ) ∧ (ϕ → τ) 𝜏 por (ϕ ∨ ψ) → τ, ϕ por [p ≡ (ψ → τ)]

(ϕ ∨ ψ) → τ ≡ (ψ → τ)

← Teorema 4.31.4, Leibniz ψ por (ψ → τ), 𝜏 por (ψ ≡ τ), ϕ por [(ϕ ∨ ψ) → τ ≡ p]

(ϕ ∨ ψ) → τ ≡ (ψ ≡ τ)

← Teorema 4.35.1, Leibniz ψ por (ϕ ∨ ψ), 𝜏 por ϕ, ϕ por [p → τ ≡ (ψ ≡ τ)]

ϕ → τ ≡ (ψ ≡ τ)

← Teorema 4.31.4, Leibniz ψ por ϕ → τ, 𝜏 por ϕ ≡ τ, ϕ por [p ≡ ψ ≡ τ]

ϕ ≡ τ ≡ ψ ≡ τ

≡ Lema: Axioma 2, Leibniz ψ por τ ≡ ψ, 𝜏 por ψ ≡ τ, ϕ por [ϕ ≡ p ≡ τ]

ϕ ≡ ψ ≡ τ ≡ τ

≡ Lema: Teorema 4.6.2, Leibniz ψ por τ ≡ τ, 𝜏 por true, ϕ por [ϕ ≡ ψ ≡ p]

(ϕ ≡ ψ) ≡ true

≡ Axioma 3

ϕ ≡ ψ

≡ Teorema 4.35.4

ϕ ∨ ψ → ϕ ∧ ψ

← Lema: Teorema 4.35.1, Leibniz ψ por ϕ ∨ ψ, 𝜏 por ϕ, ϕ por [p → ϕ ∧ ψ]

ϕ → ϕ ∧ ψ

← Teorema 4.31.4

ϕ ≡ ϕ ∧ ψ

≡ Lema: Axioma 11, Leibniz ψ por ϕ ∧ ψ, 𝜏 por ϕ ≡ ψ ≡ (ϕ ∨ ψ), ϕ por [ϕ ≡ p]

ϕ ≡ ϕ ≡ ψ ≡ (ϕ ∨ ψ)

≡ Lema: Teorema 4.6.2, Leibniz ψ por ϕ ≡ ϕ, 𝜏 por true, ϕ por [p ≡ ψ ≡ (ϕ ∨ ψ)]

true ≡ ψ ≡ (ϕ ∨ ψ)

≡ Axioma 2

(ϕ ∨ ψ) ≡ ψ

≡ Axioma 12

ϕ → ψ

Imagen que contiene Diagrama

Descripción generada automáticamente

a)

ϕ → ψ

→ Lema: Teorema 4.35.1, Leibniz ψ por ϕ, 𝜏 por ϕ ∨ τ, ϕ por [p → ψ]

ϕ ∨ τ → ψ

→ Lema: Teorema 4.35.1, Leibniz ψ por ψ, 𝜏 por ψ ∨ τ, ϕ por [ϕ ∨ τ → p]

ϕ ∨ τ → ψ ∨ τ

b)

ϕ → ψ

≡ Axioma 12

ϕ ∨ ψ ≡ ψ

≡ Leibniz ψ por ϕ ∨ ψ, 𝜏 por ψ, ϕ por [p ∧ τ]

(ϕ ∨ ψ) ∧ τ ≡ ψ ∧ τ

≡ Lema: Teorema 4.25.6,Leibniz ψ por (ϕ ∨ ψ) ∧ τ, 𝜏 por (ϕ ∧ τ) ∨ (ψ ∧ τ), ϕ por [p ≡ ψ ∧ τ]

(ϕ ∧ τ) ∨ (ψ ∧ τ) ≡ ψ ∧ τ

≡ Axioma 12

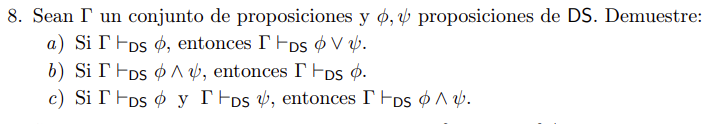
(ϕ ∧ τ) → (ψ ∧ τ)

Por el teorema 4.31.4, si ϕ → ψ ≡ (ϕ ∧ τ) → (ψ ∧ τ), entonces (ϕ → ψ ≡ (ϕ ∧ τ) → (ψ ∧ τ)) → (ϕ → ψ ≡ (ϕ ∧ τ) → (ψ ∧ τ)) y por modus ponens queda (ϕ → ψ → (ϕ ∧ τ) → (ψ ∧ τ))

Texto

Descripción generada automáticamenteUna derivación de fortalecimiento o debilitamiento no son derivaciones, ya que estas usan conectivos lógicos como la implicación y la consecuencia, mientras que la derivación solo usa equivalencias

Sección 5.4: 8, 10, 11



a)

1. ϕ ⊢DS Suposición
2. v(ϕ) = T Meta teorema de coherencia en 1
3. v(ϕ ˅ ψ) = T Meta teorema 2.23
4. (ϕ ˅ ψ) ⊢DS Meta teorema de completitud en 3

b)

1. (ϕ ˄ ψ) ⊢DS Suposición
2. v(ϕ ˄ ψ) = T Meta teorema de coherencia en 1
3. v(ϕ) = v(ψ) = T Meta teorema 2.23 caso ˄
4. ϕ ⊢DS Meta teorema de completitud en 3

c)

1. (v(ϕ) y v(ψ) ) ⊢DS Suposición
2. v(ϕ) = v(ψ) = T Meta teorema de coherencia en 1
3. v(ϕ ˄ ψ) = T Meta teorema 2.23 caso ˄
4. (ϕ ˄ ψ) ⊢DS Meta teorema de completitud en 3

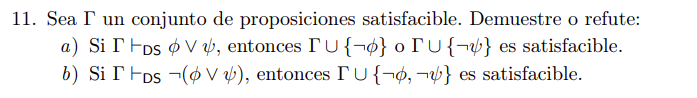


1. Γ ⊢DS ϕ Suposición
2. Γ ⊨ ϕ Meta teorema de coherencia en 1
3. v(ϕ) = T Definición 2
4. Γ es satisfacible Definición 2
5. v(¬ϕ) = F Meta teorema 2.23 caso ¬
6. Γ ⊭ ¬ϕ Definición 3
7. ¬ϕ es insatisfacible Definición 4 y 6

Segunda parte demostración

1. Γ ⊭ ¬ϕ Suposición
2. v(¬ϕ) = F Definición 1
3. v(ϕ) = T Meta teorema 2.23 caso ¬
4. Γ ⊢DS ϕ Meta teorema completitud en 3

Así, Γ ⊢DS ϕsii Γ ⊭ ¬ϕ



a)

1. (ϕ ˅ ψ) ⊢DS Suposición
2. (ψ ˅ ϕ) ⊢DS Axioma 5
3. (¬(¬ψ) ˅ ϕ) ⊢DS Lema: Teorema 4.15.6, Leibniz ϕ por [p ˅ ϕ] en 2
4. ¬ψ → ϕ ⊢DS Teorema 4.28.1
5. Γ ∪ {¬ψ} ⊢ DS ϕ Meta teorema 5.10
6. Γ ∪ {¬ψ} ⊨ ϕ Meta teorema de coherencia
7. Γ ∪ {¬ψ} es satisfacible Definición de 5
8. (¬(¬ϕ) ˅ ψ) ⊢DS Lema: Teorema 4.15.6, Leibniz ϕ por [p ˅ ϕ] en 1
9. ¬ϕ → ψ ⊢DS Teorema 4.28.1
10. Γ ∪ {¬ϕ} ⊢ DS ψ Meta teorema 5.10
11. Γ ∪ {¬ϕ} ⊨ ψ Meta teorema de coherencia
12. Γ ∪ {¬ϕ} es satisfacible Definición de 5

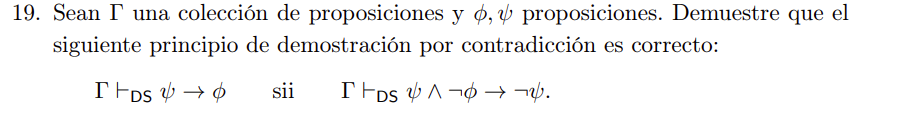
Así Γ ∪ {¬ϕ} o {¬ψ } son satisfacible

b)

1. Γ ⊢ DS (¬(ϕ ˅ ψ)) Suposición
2. Γ ⊢ DS (¬ϕ ˄ ¬ψ) Teorema 4.25.3
3. v((¬ϕ ˄ ¬ψ)) = T Meta teorema de coherencia en 2
4. Γ es satisfacible
5. v((¬ϕ) = v(¬ψ)) = T Meta teorema 4.23 en 3

Así Γ ∪ {¬ϕ,¬ψ } es satisfacible

Sección 5.5: 19, 26, 27



Por el meta teorema de coherencia, cuando v(ψ → ϕ) = T, v(ψ ˄ ϕ → ¬ψ) = T

Así partiendo de

v(ψ → ϕ) = T

se tienen 3 casos

v(ψ) = v(ϕ) = T v(ψ) = v(ϕ) = F v(ψ) = F v(ϕ) = T

Por metateorema 2.23 Por metateorema 2.23 Por metateorema 2.23

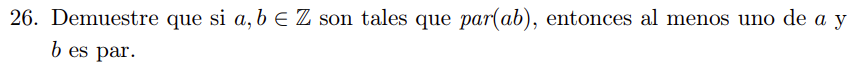
v((ψ ˄ ϕ) → ¬ψ) = T v((ψ ˄ ϕ) → ¬ψ) = T v((ψ ˄ ϕ) → ¬ψ) = T

Por metateorema de completitud para los 3 casos

Γ ⊢ DS (ψ ˄ ϕ) → ¬ψ

El caso contrario, es similar, solo se parte de que v(ψ ˄ ϕ → ¬ψ) = T y mediante valuaciones, se llega a:

Γ ⊢ DS ψ → ϕ



par(ab) → par(a) ˅ par(b)

Se usará la técnica de contra positiva para demostrar, entonces:

impar(a) ˄ impar(b) → impar(ab)

Demostración

Impar(ab)

≡ suposición del antecedente

impar((2k+1)(2k+1))

≡ aritmética

impar((2k+1)2)

≡ aritmética

impar((4k2 + 4k + 1))

≡ aritmética

impar(2\*2k(4k+1)+1)

≡ aritmética

Impar(2m + 1)

≡ definición de impar con m = 2k(4k + 1)

true

Por el meta teorema 5.16 se concluye que Γ ⊢ DS par(ab) → par(a) ˅ par(b)



impar(ab) → impar(a) ˄ impar(b)

Se usará la técnica de contra positiva para demostrar, entonces:

par(a) ˅ par(b) → par(ab)

par(ab)

≡ suposición del antecedente

par(2kb) o par(a2k)

≡ aritmética ≡ aritmética

par(2m) par(2m)

≡ definición par con m = kb ≡ definición par con m = ka

true true

Por el meta teorema 5.16 se concluye que Γ ⊢ DS impar(ab) → impar(a) ˄ impar(b)